Механико-математический факультет СамГУ
НОЦ «Фундаментальная и прикладная математика и механика» анонсирует курс

19-21 мая 2014 года
Евгений Юрьевич Смирнов
(Высшая школа экономики, факультет математики)

прочтёт мини-курс
«Плоские разбиения и знакочередующиеся матрицы»

Анонс курса

Разобьём натуральное число на слагаемые и запишем эти слагаемые в клетках прямоугольной таблицы так, чтобы они нестрого убывали по строчкам и столбцам. Полученный объект называется плоским разбиением (plane partition). Плоские разбиения удобно представлять себе как башни из детских кубиков (трёхмерные диаграммы Юнга): для этого каждое слагаемое нужно заменить столбиком кубиков соответствующей высоты. Производящая функция для количества плоских разбиений числа n была вычислена П. Макмагоном в конце XIX века. Она обобщает знаменитую производящую функцию Эйлера для числа разбиений (то есть обычных диаграмм Юнга). Мы выведем эту формулу, попутно получив ряд других утверждений о плоских разбиениях.

Знакочередующиеся матрицы (alternating sign matrices) – это квадратные матрицы, все элементы которых равны 0, 1 или –1, причём в каждой строке и каждом столбце 1 и –1 чередуются, а единиц на одну больше, чем минус единиц. В частности, все матрицы перестановок являются знакочередующимися. Знакочередующиеся матрицы были введены У. Миллсом, Д. Роббинсом и Г. Рамси в начале 1980-х годов для решения задач статистической механики – для описания так называемой модели квадратного льда. Они же сформулировали гипотезу о числе таких матриц. Эта гипотеза была доказана Зейльбергером и Купербергом в начале 1990-х годов. Как оказалось, число знакочередующихся матриц равняется числу плоских разбиений, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям симметрии. Мы обсудим это утверждение, а также рассмотрим ряд других задач из алгебры, теории представлений и комбинаторики, в которых возникают плоские разбиения.

Ещё один сюжет, о котором пойдёт речь, – это замощения плоских фигур доминошками (или, как говорят физики, «решеточные модели димеров»). Мы обсудим теорему об ацтекском бриллианте, которая утверждает, что число замощений ромба на клетчатой бумаге с диагональю $2n$ при помощи доминошек размера 2×1 равняется $2^{n(n+1)/2}$. Эта теорема имеет не менее трёх существенно разных доказательств, каждое из которых по-своему поучительно: в одном из них появляются знакочередующиеся матрицы, другое связано с теорией представлений полной линейной группы, третье – с путями на решётках.

Всего планируется три-четыре лекции. Никаких предварительных знаний, выходящих за пределы стандартного курса алгебры, не предполагается.

Первая лекция состоится

19 мая, в понедельник, в 15:00, аудитория 412м

Приглашаются все желающие!

Координатор: Михаил Игнатьев

Электронная почта: mihail.ignatev@gmail.com